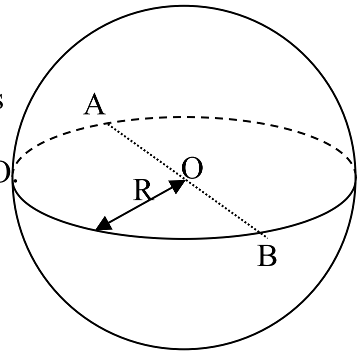
BOULES ET SPHÈRES

I Des définitions

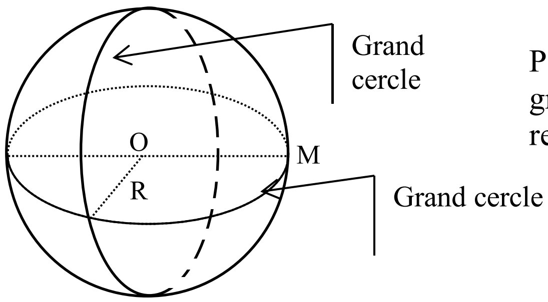


Définition 1 : la sphère de centre O et de rayon 5 cm est la surface constituée de tous les points qui sont à la distance de …………… du point O.

Définition 2 : la boule de centre O et de rayon 5 cm est le solide constitué de tous les points de l'espace situés à une distance …………………………… à 5 cm du point O.

Définition 3 : deux points appartenant à une sphère sont diamétralement opposés lorsqu'ils sont alignés avec le …………….. de la sphère.

Définition 4 : un grand cercle d'une sphère de centre O et de rayon R est un cercle de centre O et de rayon R.



Pour donner l'impression de volume, on trace deux grands cercles à diamètres perpendiculaires, que l'on représente par des ellipses.

II Aire d'une sphère – volume d'une boule

L'aire, $\mathcal{A}$, d'une sphère de rayon R et le volume, $\mathcal{V}$, d'une boule de rayon R sont donnés par les formules :

$$\mathcal{A} = 4 \times \pi \times R^2 = 4\pi R^2.$$

$$\mathcal{V} = \frac{4}{3} \times \pi \times R^3 = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Exercice 1

Calculer l'aire d'une sphère dont le rayon est égal à 7 cm. Calculer le volume d'une boule dont le rayon est égal à 12 km.

Exercice 2

La Terre a un rayon qui est égal à environ 6400 km. Calculer son aire et son volume. Donner le résultat en écriture scientifique.
Calculer la longueur L d'un grand cercle. Donner sa valeur exacte en fonction de π.

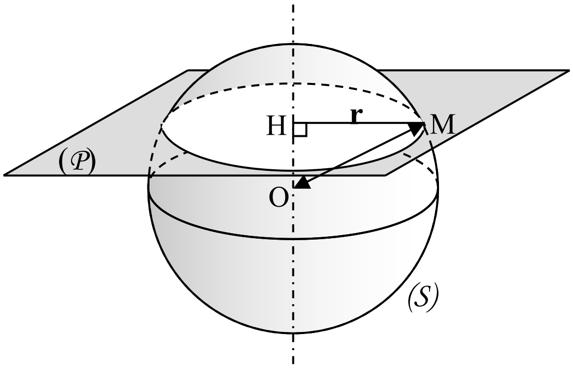
III <u>Section d'une sphère par un plan</u>

<u>Propriété</u> : La section d'une sphère par un plan est un cercle.

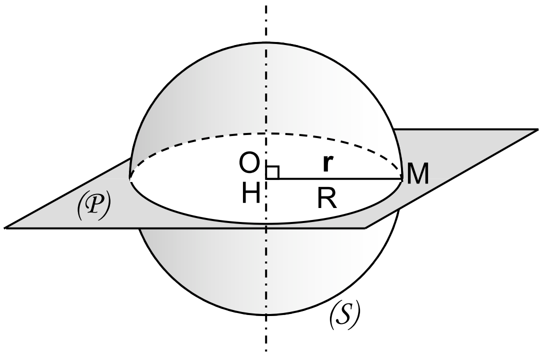
On considère une sphère$(\mathcal{S})$ de centre O et de rayon R et $(\mathcal{P})$ un plan la sectionnant.
Soit H le point du plan tel que OH soit la distance de O à $(\mathcal{P})$. On sait alors que (OH) est perpendiculaire au plan $(\mathcal{P})$. Et donc pour n'importe quel point M du plan $(\mathcal{P})$, les droites (OH) et (HM) sont perpendiculaires.
Trois cas sont à envisager :

<u>1[er] cas :</u> $0 \leq OH < R$

Le plan coupe la sphère selon un <u>cercle de centre H et de rayon r</u>. On peut calculer le rayon r à l'aide du théorème de Pythagore appliqué au triangle, MHO, rectangle en H. On trouve $r = \sqrt{R^2 - OH^2}$

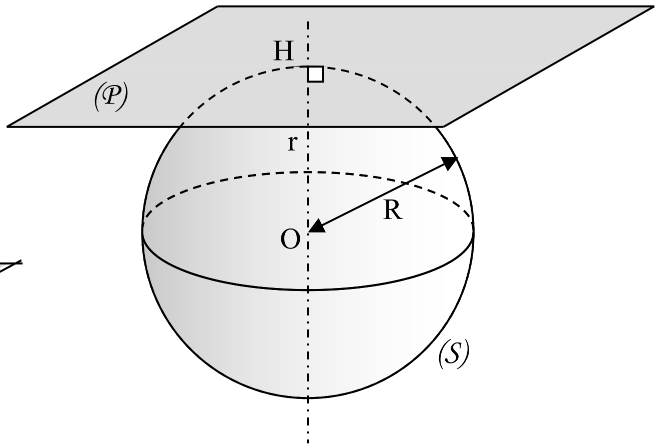


Le cas où OH = 0 est obtenu lorsque O et H sont confondus. On a donc r = R et le cercle de section est appelé <u>grand cercle</u>.
Les grands cercles sont obtenus lorsque le plan de section passe par le **centre de la sphère**



<u>2[ième] cas :</u> $OH = R$

Dans ce cas le plan et la sphère ont un seul point qui est H.
On dit que le plan et la sphère sont tangents en H.



<u>3[ième] cas :</u> $OH > R$ Dans ce cas le plan $(\mathcal{P})$ ne coupe pas la sphère.